# B.　2 体衝突の力学 (相互作用する 2 質点の運動)

**目次**



## B.1 基礎事項

• 質量 $m_1$ の質点 1 と質量 $m_2$ の質点 2 が互いに力を作用し合いながら運動する問題を考える。2 質点には他の外力は作用しないとする。

• 質点 1 と質点 2 の間に作用する力は、ポテンシャルを持ち、質点 1 と質点 2 を結ぶ直線の方向に作用し、大きさは質点間の距離のみに依存するとする。また、この力は質点間の距離が十分大きくなったときは作用しなくなるものとする。図 B.1 に示すように、この力は引力の場合もあるし斥力の場合もある。

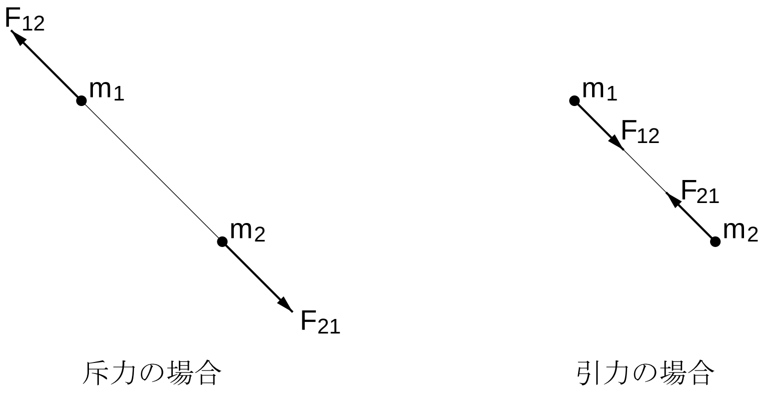



図 B.1　2 質点に作用する力

• 次ページの図 B.2 に示すように

空間に固定した座標系 (実験室系) を $O-xyz$,

時刻 $t$ における質点 1 の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(t)$,

時刻 $t$ における質点 2 の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2(t)$,

時刻 $t$ における質点 1 の速度ベクトルを $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}_1(t) = \dot{\boldsymbol{r}}_1$,
時刻 $t$ における質点 2 の速度ベクトルを $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{c}_2(t) = \dot{\boldsymbol{r}}_2$ とする。
質点 1 に作用する質点 2 による力を $\boldsymbol{F}_{12} = \boldsymbol{F}_{12}(r)$,
質点 2 に作用する質点 1 による力を $\boldsymbol{F}_{21} = \boldsymbol{F}_{21}(r) = -\boldsymbol{F}_{12}(r)$ とする。
ここで、$r$ は質点 1 と質点 2 の距離

$$r = \mid \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \mid \tag{B1}$$

である。

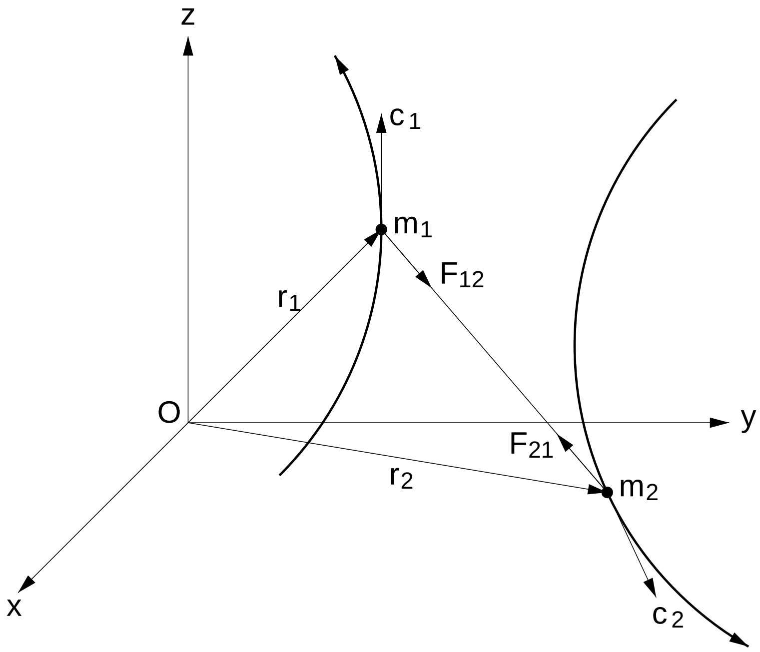



図 B.2　2 質点の運動

● この 2 質点系の重心の座標 $\boldsymbol{R}(t)$ は

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \quad . \tag{B2}$$

ここで

$$m_0 \equiv m_1 + m_2 \quad , \quad M_1 \equiv m_1/m_0 \quad , \quad M_2 \equiv m_2/m_0 \tag{B3}$$

とおけば、重心の座標 $\boldsymbol{R}$ は

$$\boldsymbol{R} = M_1\boldsymbol{r}_1 + M_2\boldsymbol{r}_2 \tag{B4}$$

重心の速度 $\boldsymbol{G}$ は

$$\boldsymbol{G} = \dot{\boldsymbol{R}} = M_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + M_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 = M_1\boldsymbol{c}_1 + M_2\boldsymbol{c}_2 \tag{B5}$$

となる。

●2 質点の相対速度を下記のように定義する。

$$\boldsymbol{g}_{21} = \boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{c}_1 \quad , \quad \boldsymbol{g}_{12} = \boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{c}_2 \quad , \quad \boldsymbol{g}_{21} = -\boldsymbol{g}_{12} \tag{B6}$$

● 式 (B3),(B5),(B6) より

$$\boldsymbol{G} = \frac{m_1}{m_0}\boldsymbol{c}_1 + \frac{m_2}{m_0}(\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{g}_{21}) = \frac{m_1 + m_2}{m_0}\boldsymbol{c}_1 + \frac{m_2}{m_0}\boldsymbol{g}_{21} = \boldsymbol{c}_1 + M_2\boldsymbol{g}_{21}$$

$$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{G} - M_2\boldsymbol{g}_{21} = \boldsymbol{G} + M_2\boldsymbol{g}_{12} \tag{B7-1}$$

$$\boldsymbol{G} = \frac{m_1}{m_0}(\boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{g}_{21}) + \frac{m_2}{m_0}\boldsymbol{c}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_0}\boldsymbol{c}_2 - \frac{m_1}{m_0}\boldsymbol{g}_{21} = \boldsymbol{c}_2 - M_1\boldsymbol{g}_{21}$$

$$\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{G} + M_1\boldsymbol{g}_{21} = \boldsymbol{G} - M_1\boldsymbol{g}_{12} \tag{B7-2}$$

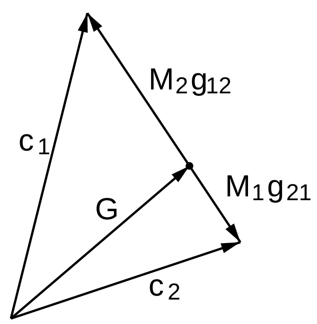



図 B.3　質点速度, 重心速度, 相対速度の関係

● 時刻 $t'$ における値を　$'$　付けて表せば、$t'$ における質点 1,2 の速度は

$$\boldsymbol{c}_1' = \boldsymbol{G}' + M_2\boldsymbol{g}_{12}' \quad , \quad \boldsymbol{c}_2' = \boldsymbol{G}' + M_1\boldsymbol{g}_{21}' \tag{B8}$$

● この 2 質点系は孤立系であるので運動量は保存され

$$m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2 = \text{const.} \tag{B9}$$

式 (B5),(B9) より重心の速度 $\boldsymbol{G}$ は

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{m_0}(m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2) = \text{const.} \tag{B10}$$

となり、一定となる。従って式 (B8) は $\boldsymbol{G}'$ の　$'$　が取れて

$$\boldsymbol{c}_1' = \boldsymbol{G} + M_2\boldsymbol{g}_{12}' \quad , \quad \boldsymbol{c}_2' = \boldsymbol{G} + M_1\boldsymbol{g}_{21}' \tag{B11}$$

となる。

• 同じ理由により力学的エネルギーも保存され

$$\frac{1}{2}m_1c_1^2 + \frac{1}{2}m_2c_2^2 + \phi(r) = \text{const.} \tag{B12}$$

ここで $\phi$ は質点 1,2 の間に作用する力のポテンシャルエネルギー、$r$ は質点 1,2 の間の距離 (式 (B1) 参照) である。

　時刻 $t, t'$ におけるエネルギーは等しく

$$\frac{1}{2}m_1c_1^2 + \frac{1}{2}m_2c_2^2 + \phi(r) = \frac{1}{2}m_1c_1'^2 + \frac{1}{2}m_2c_2'^2 + \phi(r') \tag{B13}$$

• 2 質点間の距離が最小になる時刻を $t_0$ とし、

$$t = t_0 - \varepsilon \quad , \quad t' = t_0 + \varepsilon$$

として $\varepsilon$ を十分大きくとるとき、$r \to \infty$ となるような場合を考える。これは、2 質点間に作用する力の種類、初期条件によっては 2 質点間の距離 $r$ が有界にとどまる場合もあるが、そのような場合は除くということを意味する。

• 十分大きな $\varepsilon$ に対応する時刻 $t$ の状態を衝突前、時刻 $t'$ の状態を衝突後と呼ぶことにする。

• 衝突前と衝突後では $r \to \infty, \phi \to 0$ となるから力学的エネルギーの保存は運動エネルギーの保存となる。

$$\frac{1}{2}m_1c_1^2 + \frac{1}{2}m_2c_2^2 = \frac{1}{2}m_1c_1'^2 + \frac{1}{2}m_2c_2'^2 \tag{B14}$$

• 式 (B7) より

$$c_1^2 = \boldsymbol{c}_1.\boldsymbol{c}_1 = (\boldsymbol{G} + M_2\boldsymbol{g}_{12})^2 = G^2 + 2M_2\boldsymbol{G}.\boldsymbol{g}_{12} + M_2^2g^2$$

$$c_2^2 = \boldsymbol{c}_2.\boldsymbol{c}_2 = (\boldsymbol{G} + M_1\boldsymbol{g}_{21})^2 = G^2 + 2M_1\boldsymbol{G}.\boldsymbol{g}_{21} + M_1^2g^2$$

ここで $g = |\boldsymbol{g}_{12}| = |\boldsymbol{g}_{21}|$ である。これを質点 1,2 の衝突前の運動エネルギーの式に代入して

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2) \\
=\ &\frac{1}{2}\left[(m_1+m_2)G^2 + 2\frac{m_1 m_2}{m_0}\boldsymbol{G}.\boldsymbol{g}_{12} + 2\frac{m_1 m_2}{m_0}\boldsymbol{G}.\boldsymbol{g}_{21} + \left(\frac{m_1 m_2^2}{m_0^2} + \frac{m_1^2 m_2}{m_0^2}\right) g^2\right] \\
=\ &\frac{1}{2}\left[m_0 G^2 + \frac{m_1 m_2 (m_1+m_2)}{m_0^2} g^2\right] = \frac{1}{2} m_0 (G^2 + M_1 M_2 g^2)
\end{aligned}
$$

すなわち

$$\frac{1}{2}(m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2) = \frac{1}{2} m_0 (G^2 + M_1 M_2 g^2) \qquad \text{(B15} - 1\text{)}$$

を得る。

同様にして質点 1,2 の衝突後の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}(m_1 c_1'^2 + m_2 c_2'^2) = \frac{1}{2} m_0 (G^2 + M_1 M_2 g'^2) \qquad \text{(B15} - 2\text{)}$$

と表される。

● 運動エネルギー保存則 (B14) と式 (B15) より

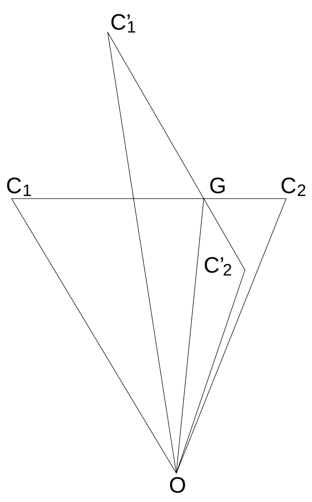
$$g = g' \qquad \text{(B16)}$$

を得る。

すなわち、衝突前後の相対速度の絶対値は等しく、相対速度は衝突により向きだけを変える。

なお、衝突期間中 ($\phi(r) \neq 0$ の間) は $g$ は変化し、$g = \text{const.}$ ではない。

● 衝突による質点 1,2 の速度ベクトルの変化を図 B.4 に示す。




$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{c_1} = \overline{OC_1} \\
&\boldsymbol{c_2} = \overline{OC_2} \\
&\boldsymbol{c_1'} = \overline{OC_1'} \\
&\boldsymbol{c_2'} = \overline{OC_2'} \\
&\boldsymbol{G} = \overline{OG} \\
&\boldsymbol{g_{21}} = \overline{C_1 C_2} \\
&\boldsymbol{g_{21}'} = \overline{C_1' C_2'} \\
&\overline{C_1 G} : \overline{G C_2} = m_2 : m_1 \\
&\overline{C_1' G} : \overline{G C_2'} = m_2 : m_1
\end{aligned}
$$

図 B.4　衝突による速度の変化

• 座標原点 $G$ が重心 $\boldsymbol{R}$ に固定されたカーテシアン座標系 $G-\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ を考える。この座標系は重心の移動と共に空間の中を並進運動するが、回転運動はしないとする。

• 座標系 $G-\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ から見た質点 1,2 の運動を考える。座標系 $G-\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ における質点 1,2 の位置 $\tilde{\boldsymbol{r}}_1, \tilde{\boldsymbol{r}}_2$ は、$\boldsymbol{r}_{21} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ とおいて

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{r}}_1 = \ & \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 - \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_0} = \frac{m_0 - m_1}{m_0}\boldsymbol{r}_1 - \frac{m_2}{m_0}\boldsymbol{r}_2 \\ = \ & M_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = -M_2\boldsymbol{r}_{21} \end{aligned} \quad (\mathrm{B17-1})$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{r}}_2 = \ & \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_2 - \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_0} = -\frac{m_1}{m_0}\boldsymbol{r}_1 + \frac{m_0 - m_2}{m_0}\boldsymbol{r}_2 \\ = \ & M_1(-\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) = M_1\boldsymbol{r}_{21} \end{aligned} \quad (\mathrm{B17-2})$$

座標系 $G-\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ における質点 1,2 の速度 $\tilde{\boldsymbol{c}}_1, \tilde{\boldsymbol{c}}_2$ は、式 (B7) より

$$\tilde{\boldsymbol{c}}_1 = \boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{G} = -M_2\boldsymbol{g}_{21} \quad , \quad \tilde{\boldsymbol{c}}_2 = \boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{G} = M_1\boldsymbol{g}_{21} \quad (\mathrm{B18})$$

• 座標系 $G-\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ における質点系 1,2 の原点 $G$ に関する角運動量 $\boldsymbol{M}$ は

$$\boldsymbol{M} = \tilde{\boldsymbol{r}}_1 \times m_1\tilde{\boldsymbol{c}}_1 + \tilde{\boldsymbol{r}}_2 \times m_2\tilde{\boldsymbol{c}}_2 = \tilde{\boldsymbol{r}}_1 \times m_1\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_1 + \tilde{\boldsymbol{r}}_2 \times m_2\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_2. \quad (\mathrm{B19})$$

$\boldsymbol{M}$ の時間変化は

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\tilde{\boldsymbol{r}}_1 \times m_1\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_1 + \tilde{\boldsymbol{r}}_2 \times m_2\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_2\right) = \tilde{\boldsymbol{r}}_1 \times m_1\ddot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_1 + \tilde{\boldsymbol{r}}_2 \times m_2\ddot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_2 \quad (\mathrm{B20})$$

(ここで $\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_1 \times \dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_1 = 0, \dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_2 \times \dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_2 = 0$ を用いた)

運動方程式より

$$m_1\ddot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_1 = \boldsymbol{F}_{12} = -\phi'(r_{21})\frac{\tilde{\boldsymbol{r}}_2 - \tilde{\boldsymbol{r}}_1}{r_{21}} \quad , \quad m_2\ddot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_2 = \boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12} = \phi'(r_{21})\frac{\tilde{\boldsymbol{r}}_2 - \tilde{\boldsymbol{r}}_1}{r_{21}} \quad (\mathrm{B21})$$

式 (B21) を式 (B20) に代入すれば

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} &= \frac{\phi'(r_{21})}{r_{21}}\{-\tilde{\boldsymbol{r}}_1 \times (\tilde{\boldsymbol{r}}_2 - \tilde{\boldsymbol{r}}_1) + \tilde{\boldsymbol{r}}_2 \times (\tilde{\boldsymbol{r}}_2 - \tilde{\boldsymbol{r}}_1\} \\ &= \frac{\phi'(r_{21})}{r_{21}}(-\tilde{\boldsymbol{r}}_1 \times \tilde{\boldsymbol{r}}_2 - \tilde{\boldsymbol{r}}_2 \times \tilde{\boldsymbol{r}}_1) = 0 \end{aligned} \quad (\mathrm{B22})$$

すなわち $\boldsymbol{M} = \mathrm{const.}$ を得る。

重心に固定された座標系における質点系 $1, 2$ の重心に関する角運動量は一定である。

● 角運動量 $\boldsymbol{M}$ を式 (B17),(B18) により以下のように書き換える。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \tilde{\boldsymbol{r}}_1 \times m_1 \tilde{\boldsymbol{c}}_1 + \tilde{\boldsymbol{r}}_2 \times m_2 \tilde{\boldsymbol{c}}_2 = -M_2 \boldsymbol{r}_{21} \times m_1(-M_2)\boldsymbol{g}_{21} + M_1 \boldsymbol{r}_{21} \times m_2 M_1 \boldsymbol{g}_{21} \\ &= (m_1 M_2^2 + m_2 M_1^2)\boldsymbol{r}_{21} \times \boldsymbol{g}_{21} \end{aligned} \quad \text{(B23)}$$

$\tilde{\boldsymbol{r}}_1$ と $\boldsymbol{M}$ の内積をとれば、

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_1 . \boldsymbol{M} = (-M_2 \boldsymbol{r}_{21}).(m_1 M_2^2 + m_2 M_1^2)\boldsymbol{r}_{21} \times \boldsymbol{g}_{21} = 0 \quad \text{(B24} - 1)$$

同様に

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_2 . \boldsymbol{M} = 0 \quad \text{(B24} - 2)$$

ここで、$\boldsymbol{M} = \text{const.}$ であるから質点 1,2 の位置ベクトル $\tilde{\boldsymbol{r}}_1, \tilde{\boldsymbol{r}}_2$ は原点 $G$ を含み $\boldsymbol{M}$ を法線とする平面内にある。すなわち、

重心に固定された座標系 $G - \tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$では、質点の運動は、重心を含む一平面内の運動となる。

この平面を衝突平面と呼ぶことにする。

● 衝突平面内における 2 質点の運動の様子を図 B.5 に示す。

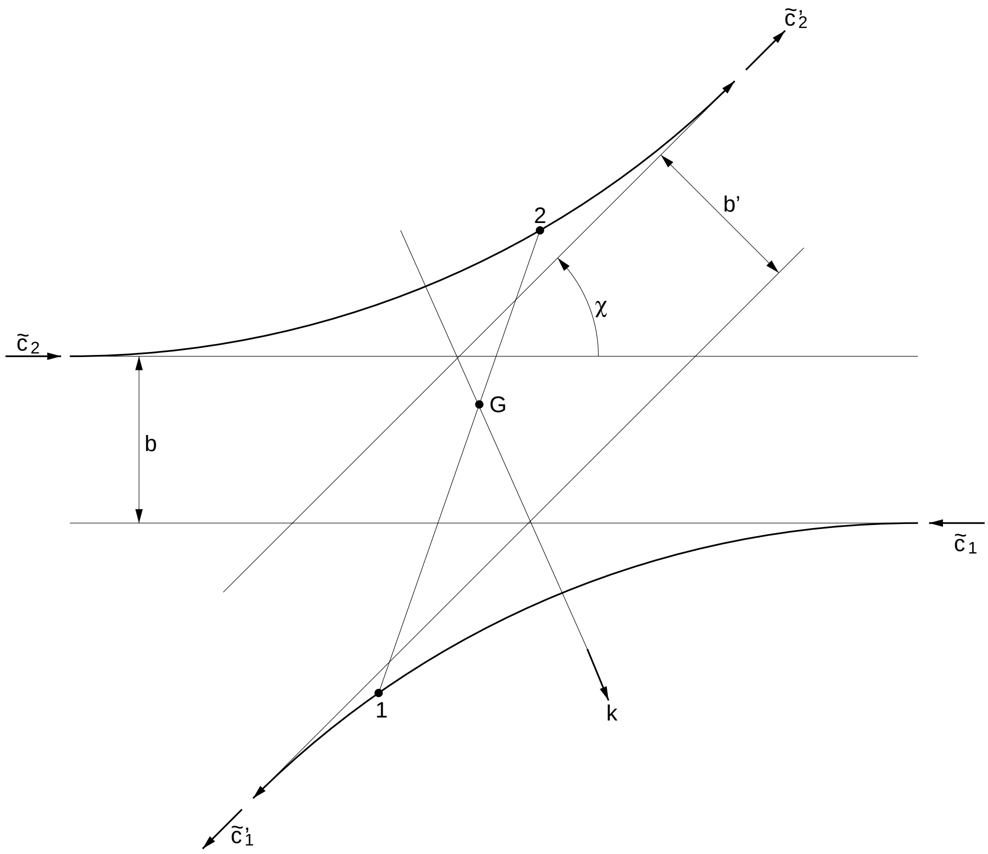



図 B.5　衝突平面内の 2 質点の運動

図中 $b$ は衝突径数と呼ばれ、質点間の相互作用が無い場合における 2 質点間の距離の最小値として定義される。角運動量保存の法則により衝突後の衝突径数 $b'$ は、$b$ に等しい。

$$b' = b \tag{B.25}$$

• 衝突前の質点の速度ベクトルに対して衝突後の質点の速度ベクトルがなす角 $\chi$(衝突による質点の運動方向の変化) を偏向角という。$\chi$ は衝突前の質点の速度ベクトルの方向を極軸とする天頂角として定義されるため、2 質点間に引力が作用しない場合は

$$0 \leq \chi \leq \pi \tag{B.26}$$

となる。

• 偏向角 $\chi$ は衝突径数 $b$ と相対速度 $g$ および質点 1,2 に働く力のポテンシャル $\phi(r)$ が与えられれば決定される。すなわち、$\chi$ は $b, g$ の関数

$$\chi = f(b, g) \tag{B.27}$$

となり、関数 $f$ の具体形はポテンシャル $\phi$ により定まることになる。

• 質点 1,2 の衝突前の実験室系における位置と速度が与えられれば、衝突平面内における質点 1,2 の衝突前の位置と速度が式 (B17),(B18) により定まる。質点間に働く力のポテンシャルは既知であるから運動方程式を解くことにより衝突後の質点 1,2 の衝突平面における位置と速度が求められる。一方、衝突平面の実験室系における方程式は次節の B.2 に示すようにして求められるから、質点 1,2 の衝突後の実験室系における位置と速度は、上記の衝突平面内における衝突後の位置と速度から求められる。

## B.2 衝突平面の方程式

• 2 質点が運動する衝突平面の方程式は以下のように求められる。時刻 $t = 0$ における質点 1,2 の実験室系における位置と速度を $\boldsymbol{r}_{10}, \boldsymbol{r}_{20}, \boldsymbol{c}_{10}, \boldsymbol{c}_{20}$ とする。時刻 $t = 0$ における質点 1,2 の相対位置 $\boldsymbol{r}_{21,0}$ と相対速度 $\boldsymbol{g}_{21,0}$ は

$$\boldsymbol{r}_{21,0} = \boldsymbol{r}_{20} - \boldsymbol{r}_{10} \quad , \quad \boldsymbol{g}_{21,0} = \boldsymbol{c}_{20} - \boldsymbol{c}_{10} \tag{B.28}$$

となる。質点系 1,2 の重心 $G$ に関する角運動量 $\boldsymbol{M}$ は式 (B23) より

$$\boldsymbol{M} = (m_1 M_2^2 + m_2 M_1^2)\boldsymbol{r}_{21,0} \times \boldsymbol{g}_{21,0} = \text{const.} \tag{B.29}$$

となる。求める平面の方程式は $O - \tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ 系では

$$\tilde{\boldsymbol{r}}.\boldsymbol{M} = 0 \tag{B.30}$$

となり、式 (B.29) から

$$\tilde{\boldsymbol{r}}.(\boldsymbol{r}_{21,0} \times \boldsymbol{g}_{21,0}) = 0 \tag{B.31}$$

となる。スカラー 3 重積の記号 $[\boldsymbol{abc}] \equiv \boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を使えば

$$[\tilde{\boldsymbol{r}} \quad \boldsymbol{r}_{21,0} \quad \boldsymbol{g}_{21,0}] = 0 \tag{B.32}$$

となる。実験室系における平面の方程式は、式 (B32) の $\tilde{\boldsymbol{r}}$ に

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R} \tag{B33}$$

なる関係を代入することにより求められる。ここで $\boldsymbol{R}$ は重心の位置ベクトルであり

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{G}t \tag{B34}$$

と表される。$\boldsymbol{R}_0$ は $t = 0$ における重心位置、$\boldsymbol{G}$ は重心の速度 (一定) で、それぞれ

$$\boldsymbol{R}_0 = M_1\boldsymbol{r}_{10} + M_2\boldsymbol{r}_{20} \quad , \quad \boldsymbol{G} = M_1\boldsymbol{c}_{10} + M_2\boldsymbol{c}_{20} \tag{B35}$$

と表される。式 (B33),(B34) を式 (B32) に代入して、

$$[\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{G}t) \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}] = 0$$

$$[\boldsymbol{r} \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}] - [\boldsymbol{R}_0 \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}] - [\boldsymbol{G} \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}]t = 0 \tag{B36}$$

• 式 (B36) の左辺第 2 項に式 (B35),(B28) を代入すれば、

$$\begin{aligned}
& [\boldsymbol{R}_0 \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}] \\
= \;& [(M_1\boldsymbol{r}_{10} + M_2\boldsymbol{r}_{20}) \;\; (\boldsymbol{r}_{20} - \boldsymbol{r}_{10}) \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}] \\
= \;& M_1[\boldsymbol{r}_{10} \;\; (\boldsymbol{r}_{20} - \boldsymbol{r}_{10}) \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}] + M_2[\boldsymbol{r}_{20} \;\; (\boldsymbol{r}_{20} - \boldsymbol{r}_{10}) \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}] \\
= \;& M_1[\boldsymbol{r}_{10} \;\; \boldsymbol{r}_{20} \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}] + M_2[\boldsymbol{r}_{20} \;\; (-\boldsymbol{r}_{10}) \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}] \\
= \;& M_1[\boldsymbol{r}_{10} \;\; \boldsymbol{r}_{20} \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}] + M_2[\boldsymbol{r}_{10} \;\; \boldsymbol{r}_{20} \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}] \\
= \;& [\boldsymbol{r}_{10} \;\; \boldsymbol{r}_{20} \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}]
\end{aligned} \tag{B37}$$

となる。

• 式 (B36) の左辺第 3 項のスカラー 3 重積に式 (B35),(B28) を代入すれば、

$$\begin{aligned}
& [\boldsymbol{G} \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; \boldsymbol{g}_{21,0}] \\
= \;& [(M_1\boldsymbol{c}_{10} + M_2\boldsymbol{c}_{20}) \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; (\boldsymbol{c}_{20} - \boldsymbol{c}_{10})] \\
= \;& M_1[\boldsymbol{c}_{10} \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; (\boldsymbol{c}_{20} - \boldsymbol{c}_{10})] + M_2[\boldsymbol{c}_{20} \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; (\boldsymbol{c}_{20} - \boldsymbol{c}_{10})] \\
= \;& M_1[\boldsymbol{c}_{10} \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; \boldsymbol{c}_{20}] + M_2[\boldsymbol{c}_{20} \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; (-\boldsymbol{c}_{10})] \\
= \;& M_1[\boldsymbol{c}_{10} \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; \boldsymbol{c}_{20}] + M_2[\boldsymbol{c}_{10} \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; \boldsymbol{c}_{20}] \\
= \;& [\boldsymbol{c}_{10} \;\; \boldsymbol{r}_{21,0} \;\; \boldsymbol{c}_{20}] = -[\boldsymbol{c}_{10} \;\; \boldsymbol{c}_{20} \;\; \boldsymbol{r}_{21,0}]
\end{aligned} \tag{B38}$$

となる。

• 式 (B37),(B38) を式 (B36) に代入して、衝突平面の方程式

$$[\boldsymbol{r}\ \ \boldsymbol{r}_{21,0}\ \ \boldsymbol{g}_{21,0}] - [\boldsymbol{r}_{10}\ \ \boldsymbol{r}_{20}\ \ \boldsymbol{g}_{21,0}] + [\boldsymbol{c}_{10}\ \ \boldsymbol{c}_{20}\ \ \boldsymbol{r}_{21,0}]t = 0 \quad \text{(B39)}$$

を得る。

## B.3 衝突前の速度と衝突後の速度の関係

• 上述のやり方によれば質点 1,2 の衝突前の位置, 速度と、衝突後の位置, 速度との関係が求められる。しかし、気体運動論では衝突前後の質点 1,2 の位置の関係まで要求されることはなく、衝突前後の質点 1,2 の速度の関係のみで十分である。このため問題は簡単になり、衝突前後の質点 1,2 の速度の関係は、以下のように具体的に求められる。

• 質点 1,2 が最も接近したときの質点 1,2 を結ぶ直線を apse line という。apse line の方向を持つ単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ を apse ベクトルという。向きは重心 G から質点 1 の側に向いているとする (逆に向いていると定義しても以下の議論は同様に成立する。) (図 B.5 参照)

• 質点の運動は apse line を対称軸として対称であるから質点 1 の衝突後の速度 $\tilde{\boldsymbol{c}}_1'$ と衝突前の速度 $\tilde{\boldsymbol{c}}_1$ の差は

$$\tilde{\boldsymbol{c}}_1' - \tilde{\boldsymbol{c}}_1 = -2(\tilde{\boldsymbol{c}}_1.\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} \quad \text{(B.40)}$$

と表される。(図 B.6 参照)

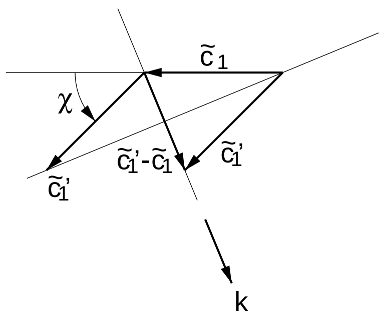



図 B.6　質点 1 の速度の変化

右辺の $\tilde{\boldsymbol{c}}_1$ に式 (B.18) を代入すれば

$$\tilde{\boldsymbol{c}}_1' - \tilde{\boldsymbol{c}}_1 = 2M_2(\boldsymbol{g}_{21}.\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} \quad \text{(B.41)}$$

を得る。同様にして質点 2 の衝突後の速度 $\tilde{\boldsymbol{c}}_2'$ と衝突前の速度 $\tilde{\boldsymbol{c}}_2$ との差

$$\tilde{\boldsymbol{c}}_2' - \tilde{\boldsymbol{c}}_2 = -2(\tilde{\boldsymbol{c}}_2.\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} = -2M_1(\boldsymbol{g}_{21}.\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} \quad \text{(B.42)}$$

を得る。

式 (B.18) より質点 1,2 の速度の衝突前後の差は、座標系 $G-\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ においても実験室系 $O-xyz$ においても等しくなり

$$\boldsymbol{c}_1'-\boldsymbol{c}_1=\tilde{\boldsymbol{c}}_1'-\tilde{\boldsymbol{c}}_1 \quad , \quad \boldsymbol{c}_2'-\boldsymbol{c}_2=\tilde{\boldsymbol{c}}_2'-\tilde{\boldsymbol{c}}_2 \tag{B.43}$$

となる。上式と式 (B.41),(B.42) より、

$$\boldsymbol{c}_1'-\boldsymbol{c}_1=2M_2(\boldsymbol{g}_{21}.\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} \quad , \quad \boldsymbol{c}_2'-\boldsymbol{c}_2=-2M_1(\boldsymbol{g}_{21}.\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} \tag{B.44}$$

を得る。

ここで apse ベクトル $\boldsymbol{k}$ の実験室系における成分が求められれば、実験室系における質点 1,2 の速度の衝突前後の関係が得られることになる。

● 図 B.7 に示すように apse ベクトル $\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{g}_{21}$ に平行な成分 $\boldsymbol{k}_\parallel$ と垂直な成分 $\boldsymbol{k}_\perp$ に分解する。

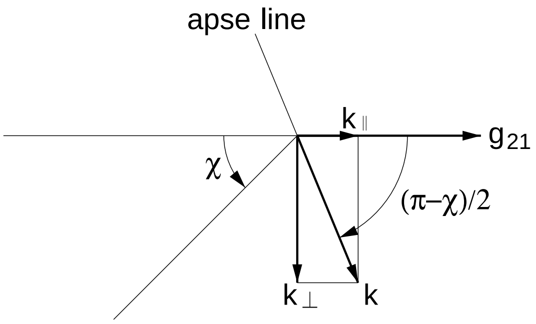



図 B.7　apse ベクトルの分解

すなわち、apse ベクトル $\boldsymbol{k}$ を

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_\parallel+\boldsymbol{k}_\perp \tag{B.45}$$

と表す。

これにより $\boldsymbol{g}_{21}$ と $\boldsymbol{k}$ の内積は

$$\boldsymbol{g}_{21}.\boldsymbol{k}=\boldsymbol{g}_{21}.(\boldsymbol{k}_\parallel+\boldsymbol{k}_\perp)=\boldsymbol{g}_{21}.\boldsymbol{k}_\parallel=g\cos\left(\frac{\pi-\chi}{2}\right)=g\sin\frac{\chi}{2} \tag{B.46}$$

となる。

●$\boldsymbol{g}_{21}$ 方向 ($\boldsymbol{k}_\parallel$ 方向) の単位ベクトルは $\boldsymbol{g}_{21}/g$ だから

$$\boldsymbol{k}_\parallel=\frac{\boldsymbol{g}_{21}}{g}\cos\left(\frac{\pi-\chi}{2}\right)=\frac{\boldsymbol{g}_{21}}{g}\sin\frac{\chi}{2} \tag{B.47}$$

となり、これを式 (B.45) に代入すれば

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{g}_{21}}{g}\sin\frac{\chi}{2} + \boldsymbol{k}_{\perp} \tag{B.48}$$

となる。

• 式 (B.46) と式 (B.48) より

$$(\boldsymbol{g}_{21}.\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} = g\sin\frac{\chi}{2}\left(\frac{\boldsymbol{g}_{21}}{g}\sin\frac{\chi}{2} + \boldsymbol{k}_{\perp}\right) = \sin\frac{\chi}{2}\left(\boldsymbol{g}_{21}\sin\frac{\chi}{2} + g\boldsymbol{k}_{\perp}\right) \tag{B.49}$$

を得る。

• 式 (B.49) の $(\boldsymbol{g}_{21}.\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$ の表現を式 (B.44) に代入すれば

$$\boldsymbol{c}'_1 - \boldsymbol{c}_1 = 2M_2\sin\frac{\chi}{2}\left(\boldsymbol{g}_{21}\sin\frac{\chi}{2} + g\boldsymbol{k}_{\perp}\right) \quad , \quad \boldsymbol{c}'_2 - \boldsymbol{c}_2 = -2M_1\sin\frac{\chi}{2}\left(\boldsymbol{g}_{21}\sin\frac{\chi}{2} + g\boldsymbol{k}_{\perp}\right) \tag{B.50}$$

を得る。

•$\boldsymbol{k}_{\perp}$ の実験室系における成分は以下のように求められる。実験室系の $x, y, z$ 軸正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ とする。成分で書けば

$$\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0) \quad , \quad \boldsymbol{e}_y = (0, 1, 0) \quad \boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1) \tag{B.51}$$

•$\boldsymbol{g}_{21}$ に平行な単位ベクトルを $\boldsymbol{h}$ とする。成分で書けば

$$\boldsymbol{h} = \left(\frac{g_x}{g}, \frac{g_y}{g}, \frac{g_z}{g}\right) \tag{B.52}$$

ここで $g_x, g_y, g_z$ はベクトル $\boldsymbol{g}_{21}$ の $x, y, z$ 成分である。

• 図 B.8 に示すように、ベクトル $\boldsymbol{e}_x$ とベクトル $\boldsymbol{h}$ が決定する平面と衝突平面のなす角を $\varepsilon$ とする。ここで、$\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{h}$ は平行でないとする。

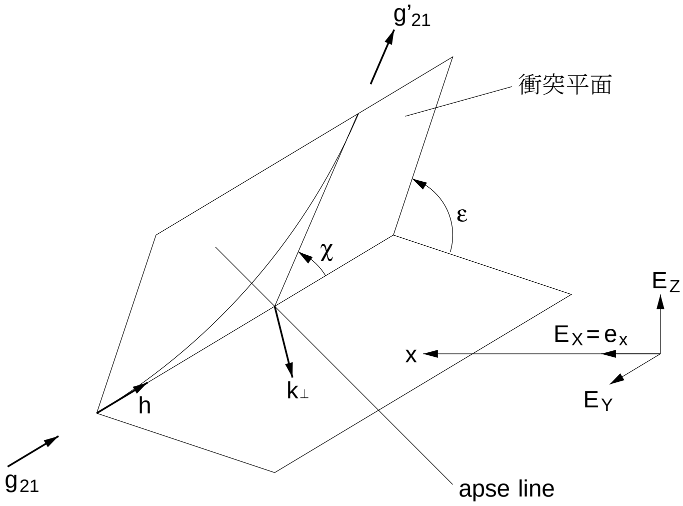



図 B.8　$\boldsymbol{k}_{\perp}$ の成分の決定

• ベクトル $\boldsymbol{e}_x$ とベクトル $\boldsymbol{h}$ の決定する平面を $XY$ 面とする以下のようなカーテシアン座標系 $XYZ$ を導入する。すなわち、この座標系の $X$ 軸正の向きの単位ベクトル $\boldsymbol{E}_X$ は $\boldsymbol{e}_x$ に一致しており、$Z$ 軸正の向きの単位ベクトル $\boldsymbol{E}_Z$ は $\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{e}_x$ と平行である。$Y$ 軸正の向きの単位ベクトル $\boldsymbol{E}_Y$ は、座標系が右手系となるように $\boldsymbol{E}_Y = \boldsymbol{E}_Z \times \boldsymbol{E}_X$ となっている。以上の $X, Y, Z$ 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{E}_X, \boldsymbol{E}_Y, \boldsymbol{E}_Z$ を $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ により表せば、$\boldsymbol{E}_X$ は

$$\boldsymbol{E}_X = \boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0) \tag{B.53}$$

となり、$\boldsymbol{E}_Z$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_Z &= \frac{\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{e}_x}{|\,\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{e}_x\,|} = \frac{1}{|\,\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{e}_x\,|}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ h_x & h_y & h_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{|\,\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{e}_x\,|}(h_z\boldsymbol{e}_y - h_y\boldsymbol{e}_z) \\
&= \frac{1}{|\,\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{e}_x\,|}\left(\frac{g_z}{g}\boldsymbol{e}_y - \frac{g_y}{g}\boldsymbol{e}_z\right)
\end{aligned}$$

となり、ここで

$$|\,\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{e}_x\,| = \left|\frac{g_z}{g}\boldsymbol{e}_y - \frac{g_y}{g}\boldsymbol{e}_z\right| = \sqrt{\frac{g_z^2 + g_y^2}{g^2}} = \frac{\sqrt{g^2 - g_x^2}}{g}$$

であるから

$$\boldsymbol{E}_Z = \frac{1}{\sqrt{g^2 - g_x^2}}(g_z\boldsymbol{e}_y - g_y\boldsymbol{e}_z) \tag{B.54}$$

となる。$\boldsymbol{E}_Y$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_Y &= \boldsymbol{E}_Z \times \boldsymbol{E}_X = \frac{1}{\sqrt{g^2 - g_x^2}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & g_z & -g_y \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 - g_x^2}}(-g_y\boldsymbol{e}_y - g_z\boldsymbol{e}_z) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{g^2 - g_x^2}}(g_y\boldsymbol{e}_y + g_z\boldsymbol{e}_z)
\end{aligned} \tag{B.55}$$

となる。

• 以上より $X, Y, Z$ 軸の $x, y, z$ 軸に関する方向余弦は

| | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 0 | 0 |
| $y$ | 0 | $-g_y/\sqrt{g^2 - g_x^2}$ | $g_z/\sqrt{g^2 - g_x^2}$ |
| $z$ | 0 | $-g_z/\sqrt{g^2 - g_x^2}$ | $-g_y/\sqrt{g^2 - g_x^2}$ |

となる。

• ベクトル $\boldsymbol{h}$ の $X,Y,Z$ 軸に関する成分 $(h_X,h_Y,h_Z)$ は

$$h_X=\boldsymbol{h}.\boldsymbol{E}_X=\frac{g_x}{g} \tag{B.56}$$

$$h_Y=\boldsymbol{h}.\boldsymbol{E}_Y=-\frac{g_y^2}{g\sqrt{g^2-g_x^2}}-\frac{g_z^2}{g\sqrt{g^2-g_x^2}}=-\frac{g^2-g_x^2}{g\sqrt{g^2-g_x^2}}=-\frac{\sqrt{g^2-g_x^2}}{g} \tag{B.57}$$

$$h_Z=\boldsymbol{h}.\boldsymbol{E}_z=\frac{g_yg_z}{g\sqrt{g^2-g_x^2}}-\frac{g_zg_y}{g\sqrt{g^2-g_x^2}}=0 \tag{B.58}$$

• ベクトル $\boldsymbol{k}_\perp$ に平行な単位ベクトル $\boldsymbol{f}$ の $X,Y,Z$ 軸に関する成分 $(f_X,f_Y,f_Z)$ を求める。ベクトル $\boldsymbol{h}$ とベクトル $\boldsymbol{f}$ が決定する平面 (衝突平面) の単位法線 $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{f}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}_X & \boldsymbol{E}_Y & \boldsymbol{E}_Z\\ h_X & h_Y & 0\\ f_X & f_Y & f_Z\end{vmatrix}=h_Yf_Z\boldsymbol{E}_X-h_Xf_Y\boldsymbol{E}_Y+(h_Xf_Y-h_Yf_X)\boldsymbol{E}_Z \tag{B.59}$$

ベクトル $\boldsymbol{h}$ とベクトル $\boldsymbol{e}_x$ が決定する平面の単位法線は $\boldsymbol{E}_z$ であり、この平面と衝突平面のなす角が $\varepsilon$ であることから

$$\boldsymbol{n}.\boldsymbol{E}_Z=\cos\varepsilon. \tag{B.60}$$

ベクトル $\boldsymbol{h}$ とベクトル $\boldsymbol{f}$ は直交するから

$$\boldsymbol{h}.\boldsymbol{f}=0. \tag{B.61}$$

式 (B.60),(B.61) から $f_X,f_Y$ に対する連立方程式

$$h_Xf_Y-h_Yf_X=\cos\varepsilon \quad , \quad h_Xf_X+h_Yf_Y=0 \tag{B.62}$$

が得られる。

　これを解いて

$$f_X=-\frac{h_Y}{h_X^2+h_Y^2}\cos\varepsilon \quad , \quad f_Y=\frac{h_X}{h_X^2+h_Y^2}\cos\varepsilon \tag{B.63}$$

式 (B.56),(B.57) より

$$h_X^2+h_Y^2=\frac{g_x^2}{g^2}+\frac{g^2-g_x^2}{g^2}=1$$

であるから

$$f_X=-h_Y\cos\varepsilon \quad , \quad f_Y=h_X\cos\varepsilon \tag{B.64}$$

となる。

　ベクトル $\boldsymbol{f}$ は単位ベクトルだから

$$f_X^2+f_Y^2+f_Z^2=1$$

$$f_Z^2 = 1 - (f_X^2 + f_Y^2) = 1 - (h_Y^2 + h_X^2)\cos^2\varepsilon = 1 - \cos^2\varepsilon = \sin^2\varepsilon$$

向きを考慮して

$$f_Z = -\sin\varepsilon \tag{B.65}$$

以上より $\boldsymbol{k}_\perp$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{f}$ の $XYZ$ 座標系における成分は

$$f_X = \frac{\sqrt{g^2 - g_x^2}}{g}\cos\varepsilon \quad , \quad f_Y = \frac{g_x}{g}\cos\varepsilon \quad , \quad f_Z = -\sin\varepsilon \tag{B.66}$$

となる。

● 従って $\boldsymbol{k}_\perp$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{f}$ の実験室系における成分は

$$f_x = \frac{\sqrt{g^2 - g_x^2}}{g}\cos\varepsilon \tag{B.67}$$

$$f_y = -\frac{g_x g_y}{g\sqrt{g^2 - g_x^2}}\cos\varepsilon - \frac{g_z}{\sqrt{g^2 - g_x^2}}\sin\varepsilon = -\frac{g_x g_y \cos\varepsilon + g g_z \sin\varepsilon}{g\sqrt{g^2 - g_x^2}} \tag{B.68}$$

$$f_z = -\frac{g_z g_x}{g\sqrt{g^2 - g_x^2}}\cos\varepsilon + \frac{g_y}{\sqrt{g^2 - g_x^2}}\sin\varepsilon = -\frac{g_z g_x \cos\varepsilon - g g_y \sin\varepsilon}{g\sqrt{g^2 - g_x^2}} \tag{B.69}$$

となる。

●$\boldsymbol{k}_\perp$ の絶対値は $\cos(\chi/2)$ であるから、$\boldsymbol{k}_\perp$ の $x, y, z$ 成分は

$$k_{\perp x} = \cos\frac{\chi}{2}\cdot\frac{\sqrt{g^2 - g_x^2}}{g}\cos\varepsilon \tag{B.70}$$

$$k_{\perp y} = -\cos\frac{\chi}{2}\cdot\frac{g_x g_y \cos\varepsilon + g g_z \sin\varepsilon}{g\sqrt{g^2 - g_x^2}} \tag{B.71}$$

$$k_{\perp z} = -\cos\frac{\chi}{2}\cdot\frac{g_z g_x \cos\varepsilon - g g_y \sin\varepsilon}{g\sqrt{g^2 - g_x^2}} \tag{B.72}$$

となる。

● 式 (B.50) と式 (B.70)〜(B.72) により質点 1,2 の衝突前後の速度の関係が求められる。これをもう少し見易い形に書き直す。式 (B.50) の第 1 式の $x, y, z$ 成分は式 (B.70)〜(B.72) より

$$\begin{aligned} c'_{1x} - c_{1x} &= 2M_2 \sin\frac{\chi}{2}\left(g_x \sin\frac{\chi}{2} + g\cos\frac{\chi}{2}\frac{\sqrt{g^2 - g_x^2}}{g}\cos\varepsilon\right) \\ &= M_2\left\{(1 - \cos\chi)g_x + \sqrt{g^2 - g_x^2}\cos\varepsilon\sin\chi\right\} \end{aligned} \tag{B.73}$$

$$
\begin{aligned}
c'_{1y} - c_{1y} &= 2M_2 \sin\frac{\chi}{2}\left(g_y \sin\frac{\chi}{2} - g\cos\frac{\chi}{2}\frac{g_x g_y \cos\varepsilon + g g_z \sin\varepsilon}{g\sqrt{g^2 - g_x^2}}\right) \\
&= M_2 \left\{(1-\cos\chi)g_y - \frac{g_x g_y \cos\varepsilon + g g_z \sin\varepsilon}{\sqrt{g^2 - g_x^2}}\sin\chi\right\}
\end{aligned}
\tag{B.74}
$$

$$
\begin{aligned}
c'_{1z} - c_{1z} &= 2M_2 \sin\frac{\chi}{2}\left(g_z \sin\frac{\chi}{2} - g\cos\frac{\chi}{2}\frac{g_z g_x \cos\varepsilon - g g_y \sin\varepsilon}{g\sqrt{g^2 - g_x^2}}\right) \\
&= M_2 \left\{(1-\cos\chi)g_z - \frac{g_z g_x \cos\varepsilon - g g_y \sin\varepsilon}{\sqrt{g^2 - g_x^2}}\sin\chi\right\}
\end{aligned}
\tag{B.75}
$$

ここで

$$
\widehat{\boldsymbol{h}} = (\hat{h}_x, \hat{h}_y, \hat{h}_z) \tag{B.76}
$$

$$
\hat{h}_x = \sqrt{g^2 - g_x^2}\cos\varepsilon \quad , \quad \hat{h}_y = -\frac{g_x g_y \cos\varepsilon + g g_z \sin\varepsilon}{\sqrt{g^2 - g_x^2}} \quad , \quad \hat{h}_z = -\frac{g_z g_x \cos\varepsilon - g g_y \sin\varepsilon}{\sqrt{g^2 - g_x^2}}
$$

と置けば

$$
\boldsymbol{c}'_1 - \boldsymbol{c}_1 = M_2 \left\{(1-\cos\chi)\boldsymbol{g}_{21} + \hat{\boldsymbol{h}}\sin\chi\right\} \tag{B.77}
$$

を得る。同様にして

$$
\boldsymbol{c}'_2 - \boldsymbol{c}_2 = -M_1 \left\{(1-\cos\chi)\boldsymbol{g}_{21} + \hat{\boldsymbol{h}}\sin\chi\right\} \tag{B.78}
$$

を得る。

## B.4 質点２の質点１に対する相対運動

• ここまでは２つの質点の運動を、質点の重心に固定した座標系で考えてきたが、いずれか一方の質点に座標系を固定し、その座標系でもう一方の質点の運動を考えた方が便利な場合もある。以下では質点１に座標系を固定し、この座標系における質点２の運動、すなわち質点１に対する質点２の相対運動を考える。質点１に固定した座標系を $1-\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ とする。

• 質点 1,2 に対する運動方程式は、実験室系でそれぞれ

$$
m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_{12} \quad , \quad m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}_{21} \tag{B.79}
$$

と書かれる。この第１式に $m_2$ を掛けたものを、第２式に $m_1$ を掛けたものから引けば

$$
m_1 m_2(\ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1) = m_1\boldsymbol{F}_{21} - m_2\boldsymbol{F}_{12} = (m_1+m_2)\boldsymbol{F}_{21}
$$

を得る。ここで、

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \quad , \quad \widehat{\boldsymbol{r}} \equiv \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 (= \boldsymbol{r})$$

とおけば、

$$\mu \ddot{\widehat{\boldsymbol{r}}} = \boldsymbol{F}_{21} \tag{B.80}$$

を得る。$\mu$ は換算質量 (reduced mass) と呼ばれる。$\widehat{\boldsymbol{r}}$ は質点 2 の座標系 $1-\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ における位置ベクトルである。

　2 質点間に働く力 $\boldsymbol{F}_{21}$ は、2 質点間の距離 $\hat{r}=r=\mid \boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1 \mid$ のみに依存するポテンシャル $\phi(\hat{r})$ から導かれるとの仮定より、

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\frac{d\phi}{d\hat{r}}\frac{\widehat{\boldsymbol{r}}}{\hat{r}} \tag{B.81}$$

と表される。上式を式 (B.80) に代入すれば、

$$\mu \ddot{\widehat{\boldsymbol{r}}} = -\frac{d\phi}{d\hat{r}}\frac{\widehat{\boldsymbol{r}}}{\hat{r}} \tag{B.82}$$

となる。これによれば、質点 2 の質点 1 に対する運動は、質量 $\mu$ の質点が原点を中心とする中心力場 $-(d\phi/d\hat{r})(\widehat{\boldsymbol{r}}/\hat{r})$ 中でする運動と等価となる。

• 座標系 $1-\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ における質点 2 の運動の座標原点に対する角運動量 $\widehat{\boldsymbol{M}} = \widehat{\boldsymbol{r}} \times \mu\dot{\widehat{\boldsymbol{r}}}$ の時間変化を考える。

$$\frac{d\widehat{\boldsymbol{M}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\widehat{\boldsymbol{r}} \times \mu\dot{\widehat{\boldsymbol{r}}}) = \mu\dot{\widehat{\boldsymbol{r}}} \times \dot{\widehat{\boldsymbol{r}}} + \mu\widehat{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\widehat{\boldsymbol{r}}} = \widehat{\boldsymbol{r}} \times \left(-\frac{d\phi}{d\hat{r}}\frac{\widehat{\boldsymbol{r}}}{\hat{r}}\right) = 0$$

すなわち $\widehat{\boldsymbol{M}}$ =const. を得る。

中心力による質点の運動の力の中心に関する角運動量は一定である。

•$\widehat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{21}$ , $\dot{\widehat{\boldsymbol{r}}} = \dot{\boldsymbol{r}}_2 - \dot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{g}_{21}$ に注意して $\widehat{\boldsymbol{M}}$ を書き直せば

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{M}} &= \boldsymbol{r}_{21} \times \mu\boldsymbol{g}_{21} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}_{21} \times \boldsymbol{g}_{21} = \frac{m_1 m_2 (m_1+m_2)}{(m_1+m_2)^2}\boldsymbol{r}_{21} \times \boldsymbol{g}_{21} \\ &= \frac{m_1^2 m_2 + m_1 m_2^2}{m_0^2}\boldsymbol{r}_{21} \times \boldsymbol{g}_{21} = (m_1 M_2^2 + m_2 M_1^2)\boldsymbol{r}_{21} \times \boldsymbol{g}_{21} \end{aligned} \tag{B.83}$$

となり、式 (B.23) の $\boldsymbol{M}$ と一致する。

•$\widehat{\boldsymbol{r}}$ と $\widehat{\boldsymbol{M}}$ の内積をとれば

$$\widehat{\boldsymbol{r}}.\widehat{\boldsymbol{M}} = \widehat{\boldsymbol{r}}.(\widehat{\boldsymbol{r}} \times \mu\dot{\widehat{\boldsymbol{r}}}) = 0 \tag{B.84}$$

となる。ここで $\widehat{\boldsymbol{M}}$ =const. であるから質点 2 の位置ベクトル $\widehat{\boldsymbol{r}}$ は質点 1 を含み $\widehat{\boldsymbol{M}}$ を法線とする平面内にある。すなわち、

質点 1 に固定された座標系 $1-\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ では、質点 2 の運動は質点 1 を含む一平面内の運動となる。

$\widehat{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{M}$ であり、質点 1,2 および重心は同一平面内にあるから、この平面は前に求めた衝突平面と一致する。

• 衝突平面内における質点 2 の質点 1 に対する運動の様子を図 B.9 に示す。

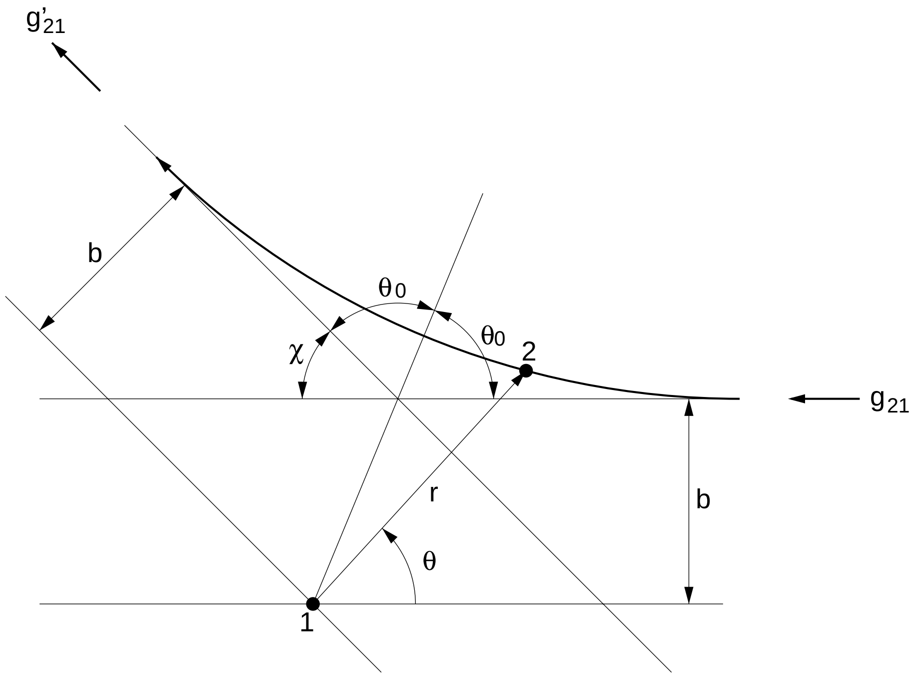



図 B.9　質点 2 の質点 1 に対する相対運動

## B.5 偏向角 $\chi$ の計算 (斥力の場合の一般論)

• 偏向角 $\chi$ は式 (B.27) に示されるように、衝突径数 $b$ と相対速度 $g$ の関数として表される。この関数の具体形を求めることを考える。

2 質点間に働く力のポテンシャル $\phi$ が 2 質点間の距離 $r$ のみの関数であることから、ここでは質点 2 の運動を質点 1 に対する相対運動とする B.4 節の方法で考える。

•2 質点間に働く力が斥力の場合、図 B.9 によれば偏向角 $\chi$ は

$$\chi=\pi-2\theta_0 \tag{B.85}$$

と表されるから、$\theta_0$ を求めればよい。

図 B.9 における質点 2 の位置を、質点 1 を原点とし、衝突前の相対速度の方向を基準線とする極座標 $(r,\theta)$ により表せば、質点 2 の軌道は

$$r=r(\theta) \tag{B.86}$$

となる。$\theta_0$ は質点 2 が質点 1 に最も近づいた時の動径角 $\theta$ の値として求められる。すなわち、

$$\frac{dr}{d\theta} = 0 \tag{B.87}$$

を与える $\theta$ として求められる。また $r$ を時間 $t$ の関数と考えれば、$\theta = \theta_0$ となる時刻、すなわち質点 2 が質点 1 に最接近する時刻は

$$\frac{dr}{dt} = 0 \tag{B.88}$$

を与える $t$ として求められる。

• 質点 2 の運動は運動方程式を解くことにより求められるが、質点 2 に働く力がポテンシャルを持つことから、エネルギー保存式を用いて質点 2 の運動を求める。

• 質点 2 が運動する際、保存される力学的エネルギー $E$(=const.) は、

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \phi(r) \tag{B.89}$$

と表される。また、保存される角運動量 $M$(=const.) は、

$$M = \mu r^2 \dot{\theta} \tag{B.90}$$

と表される。

• 式 (B.89),(B.90) より $\dot{\theta}$ を消去すれば

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2\mu r^2} + \phi(r) \tag{B.91}$$

を得る。これを $\dot{r}$ について解けば

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\{E - \phi(r)\} - \frac{M^2}{\mu^2 r^2}} \tag{B.92}$$

根号の前の符号+は質点 2 が質点 1 から遠ざかる場合に、符号 − は近づく場合に対応する。

• 式 (B.92) を

$$\frac{dt}{dr} = \pm\frac{1}{\sqrt{(2/\mu)\{E - \phi(r)\} - M^2/\mu^2 r^2}} \tag{B.93}$$

と書き直し、式 (B.90) を

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{M}{\mu r^2} \tag{B.94}$$

と書き直して、この両式より $dt$ を消去して $\theta$ と $r$ の関係

$$d\theta = \pm\frac{M/\mu r^2}{\sqrt{(2/\mu)\{E - \phi(r)\} - M^2/\mu^2 r^2}}dr = \pm\frac{M/r^2}{\sqrt{2\mu\{E - \phi(r)\} - M^2/r^2}}dr \tag{B.95}$$

を得る。

• 式 (B.95) より $\theta_0$ は

$$\theta_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{M/r^2}{\sqrt{2\mu\{E-\phi(r)\} - M^2/r^2}} dr \tag{B.96}$$

なる積分により求められる。ここで $r_0$ は質点 2 と質点 1 の距離の最小値で、式 (B.92) の $\dot{r}=0$ を与える $r$ の値である。すなわち、

$$\frac{2}{\mu}\{E-\phi(r)\} - \frac{M^2}{\mu^2 r^2} = 0 \tag{B.97}$$

の解である。

• さらに図 B.9 より

$$E = \frac{\mu}{2}g^2 \quad , \quad M = \mu b g \tag{B.98}$$

となるから、式 (B.96) は

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \int_{r_0}^{\infty} \frac{\mu b g/r^2}{\sqrt{2\mu\{\mu g^2/2 - \phi(r)\} - \mu^2 b^2 g^2/r^2}} dr \\
&= \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{(1/\mu g)\sqrt{\mu^2 g^2 - 2\mu\phi(r) - \mu^2 b^2 g^2/r^2}} \frac{b}{r^2} dr \\
&= \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\phi(r)/\mu g^2 - b^2/r^2}} \frac{b}{r^2} dr \qquad \text{(B.99)}
\end{aligned}$$

となり、式 (B.97) は

$$1 - \frac{2\phi(r)}{\mu g^2} - \frac{b^2}{r^2} = 0 \tag{B.100}$$

となる。

• 積分変数を

$$x = \frac{b}{r} \quad , \quad dx = -\frac{b}{r^2}dr \tag{B.101}$$

と変数変換し、

$$r = r_0 \rightarrow x = b/r_0 \equiv x_0 \quad , \quad r = \infty \rightarrow x = 0$$

に注意して式 (B.99) を書き直せば

$$\theta_0 = \int_{x_0}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\phi(b/x)/\mu g^2 - x^2}} (-1) dx = \int_{0}^{x_0} \left\{ 1 - x^2 - \frac{2}{\mu g^2}\phi\left(\frac{b}{x}\right) \right\}^{-\frac{1}{2}} dx \tag{B.102}$$

を得る。$x_0$ は式 (B.100) より

$$1 - x^2 - \frac{2}{\mu g^2}\phi\left(\frac{b}{x}\right) = 0 \tag{B.103}$$

なる方程式の解である。

## B.6 偏向角 $\chi$ の計算 (逆べきポテンシャルの斥力の場合)

•2 質点間に働く力が斥力で、そのポテンシャルが 2 質点間の距離 $r$ の逆べきに比例する場合の偏向角 $\chi$ を求める。

• ポテンシャル $\phi(r)$ は

$$\phi(r) = \frac{a}{r^\alpha} \qquad (a, \alpha > 0) \tag{B.104}$$

と書かれる。ここで $a, \alpha$ は正定数である。

• この $\phi(r)$ を式 (B.102) に代入すれば

$$\theta_0 = \int_0^{x_0} \left\{ 1 - x^2 - \frac{2}{\mu g^2} \frac{a x^\alpha}{b^\alpha} \right\}^{-\frac{1}{2}} dx$$

となり、ここで

$$\beta = b \left( \frac{\mu g^2}{2a\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{B.105}$$

なる無次元衝突径数と呼ばれる $\beta$ を導入すれば、

$$\theta_0 = \int_0^{x_0} \left\{ 1 - x^2 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{x}{\beta} \right)^\alpha \right\}^{-\frac{1}{2}} dx \tag{B.106}$$

となる。$x_0$ は

$$1 - x^2 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{x}{\beta} \right)^\alpha = 0 \tag{B.107}$$

の解である。

• 式 (B.105),(B.106) によれば $\alpha, \beta$ が与えられれば $\theta_0$ が計算され、式 (B.85) より偏向角 $\chi$ が求められる。すなわち、

逆べきポテンシャルの場合、偏向角$\chi$は無次元衝突径数$\beta$の関数

$$\chi = \chi(\beta) \tag{B.108}$$

となる。

• 式 (B.106) の積分は、特別の $\alpha$ の値以外については数値積分により求められる。特別の $\alpha$ については積分を既知の関数で具体的に表すことができる。以下ではその例を示す。

•$\alpha = 1$ の場合

同種の電荷を持つ荷電粒子の衝突などがこの場合に当たる。ポテンシャルは

$$\phi(r) = \frac{a}{r} \qquad (a > 0) \tag{B.109}$$

である。式 (B.106),(B.107) で $\alpha = 1$ とすれば

$$\theta_0 = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x/\beta - x^2}} \tag{B.110}$$

ここで、$x_0$ は

$$1 - \frac{x}{\beta} - x^2 = 0 \tag{B.111}$$

の解である。

式 (B.110) は積分公式 [3] より

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \left[-\sin^{-1}\frac{(-2x - 1/\beta)}{\sqrt{(1/\beta)^2 + 4}}\right]_0^{x_0} = \sin^{-1}\frac{(2x_0 + 1/\beta)}{\sqrt{(1/\beta)^2 + 4}} - \sin^{-1}\frac{1/\beta}{\sqrt{(1/\beta)^2 + 4}} \\ &= \sin^{-1}\frac{2\beta x_0 + 1}{\sqrt{1 + 4\beta^2}} - \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1 + 4\beta^2}} \end{aligned} \tag{B.112}$$

$x_0$ は、2 次方程式 (B.111) の 2 解

$$x = \frac{1}{2\beta}(-1 \pm \sqrt{1 + 4\beta^2})$$

のうち復号+のものに対応し

$$x_0 = \frac{1}{2\beta}(-1 + \sqrt{1 + 4\beta^2}) \tag{B.113}$$

これを式 (B.112) に代入して

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1 + 4\beta^2}} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1 + 4\beta^2}} \tag{B.114}$$

を得る。

式 (B.114) より $\alpha = 1$ の場合の偏向角 $\chi$ は

$$\chi = \pi - 2\theta_0 = 2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1 + 4\beta^2}} \tag{B.115}$$

となる。

<u>●$\alpha = 4$ の場合</u>

ポテンシャルは

$$\phi(r) = \frac{a}{r^4} \qquad (a > 0) \tag{B.116}$$

である。式 (B.106),(B.107) で $\alpha = 4$ とすれば

$$\theta_0 = \int_0^{x_0} \left\{1 - x^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{\beta}\right)^4\right\}^{-\frac{1}{2}} dx \tag{B.117}$$

$$1 - x^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{\beta}\right)^4 = 0 \tag{B.118}$$

となる。ここで、積分の上限 $x_0$ は、方程式 (B.118) の解である。式 (B.117) の被積分関数は、4 次の多項式

$$F(x) = 1 - x^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{\beta}\right)^4 \tag{B.119}$$

を 1/2 乗した $\sqrt{F(x)}$ の有理関数であるから楕円積分となり、以下のようにして標準形により表される。まず $F(x)$ を $x^2$ の 2 次式の積として表す。

$$F(x) = -\frac{1}{4\beta^4}(x^4 + 4\beta^4 x^2 - 4\beta^4)$$

として、$x^2$ についての 2 次方程式

$$x^4 + 4\beta^4 x^2 - 4\beta^4 = 0 \tag{B.120}$$

の解を求める。

$$x^2 = -2\beta^4 \pm \sqrt{4\beta^8 + 4\beta^4} = 2\beta^4(-1 \pm \sqrt{1 + 1/\beta^4})$$

ここで

$$\nu^2 = 2\beta^4(-1 + \sqrt{1 + 1/\beta^4}) \quad , \quad \mu^2 = 2\beta^4(1 + \sqrt{1 + 1/\beta^4}) \quad , \quad 0 < \nu^2 < \mu^2 \tag{B.121}$$

とおけば、2 解は

$$x^2 = \nu^2 \quad , \quad x^2 = -\mu^2$$

となる。これにより

$$F(x) = -\frac{1}{4\beta^4}(x^2 - \nu^2)(x^2 + \mu^2) = \frac{1}{4\beta^4}(x^2 + \mu^2)(\nu^2 - x^2)$$

となる。

方程式 (B.120) の解の 1/2 乗は、式 (B.119) の解であるから積分の上限 $x_0$ は

$$x_0 = \nu$$

となる。

以上より式 (B.117) は

$$\theta_0 = 2\beta^2 \int_0^{\nu} \left\{(x^2 + \mu^2)(\nu^2 - x^2)\right\}^{-\frac{1}{2}} dx \tag{B.122}$$

となる。この積分は変数変換

$$x^2 = \nu^2(1 - z^2) \quad , \quad dx = -\nu^2 \frac{z}{x} dz = -\nu \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} dz$$

により、

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= 2\beta^2 \int_1^0 \left[\left\{\nu^2(1-z^2)+\mu^2\right\}\left\{\nu^2-\nu^2(1-z^2)\right\}\right]^{-\frac{1}{2}}(-\nu)\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz \\
&= 2\beta^2 \int_0^1 \left\{(\nu^2+\mu^2-\nu^2 z^2)(\nu^2 z^2)(1-z^2)\right\}^{-\frac{1}{2}}\nu z dz \\
&= 2\beta^2 \int_0^1 (\nu^2+\mu^2)^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(1-\frac{\nu^2}{\nu^2+\mu^2}z^2\right)(1-z^2)\right\}^{-\frac{1}{2}} dz \\
&= \left(\frac{4\beta^4}{\nu^2+\mu^2}\right)^{1/2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}dz \qquad \text{(B.123)}
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$k^2 \equiv \frac{\nu^2}{\nu^2+\mu^2} \qquad \text{(B.124)}$$

とおいた。上式中の定積分は第 1 種完全楕円積分

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad \text{(B.125)}$$

である。

式 (B.121) より $k^2$ および式 (B.123) の積分記号の前の定数を $\beta$ で表せば

$$\nu^2+\mu^2 = 4\beta^4\sqrt{1+1/\beta^4}$$

より

$$\begin{aligned}
k^2 &= \frac{2\beta^4(-1+\sqrt{1+1/\beta^4})}{4\beta^4\sqrt{1+1/\beta^4}} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+1/\beta^4}} \\
\left(\frac{4\beta^4}{\nu^2+\mu^2}\right)^{1/2} &= \left(\frac{4\beta^4}{4\beta^4\sqrt{1+1/\beta^4}}\right)^{1/2} = \frac{1}{(1+1/\beta^4)^{1/4}}
\end{aligned}$$

となり、$\theta_0$ は

$$\theta_0 = \frac{1}{(1+1/\beta^4)^{1/4}}K\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+1/\beta^4}}\right) \qquad \text{(B.126)}$$

となる。

式 (B.85) より $\alpha = 4$ の場合の偏向角 $\chi$ は

$$\chi = \pi - \frac{2}{(1+1/\beta^4)^{1/4}}K\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+1/\beta^4}}\right) \qquad \text{(B.127)}$$

$$\beta = b\left(\frac{\mu g^2}{8a}\right)^{\frac{1}{4}} \quad , \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

となる。

**参考文献**

[1]Chapmann,S. and Cowling T.G. : The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases : Cambridge Univ.Press,Londin(1953),pp.53-58.

[2]Vincenti,W.G. and Kruger,C.H. : Introduction to Physical Gas Dynamics : John Wiley and Sons, New York(1967),pp.348-356.

[3] 森口繁一、宇田川　久、一松信 : 数学公式 I : 岩波書店 (1970),p.122.